WYBRANE WŁASNOŚCI STRUKTUR MIERZALNYCH

TOMASZ FILIPCZAK

W referacie omawiam wyniki z prac [3] – [6].

Miarę Lebesgue'a na prostej oznaczamy przez λ, rodziny zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, miary zero, borelowskich, o własności Baire'a i pierwszej kategorii oznaczamy: $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}a$ i $\mathcal{M}$.

Niech X będzie zbiorem niepustym, $\mathcal{S}$ - σ-ciałem podzbiorów X oraz $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ - σ-ideałem. Mówimy, że zbiór H jest *otoczką* zbioru A względem $(X, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, jeżeli $A \subset H$, $H \in \mathcal{S}$ oraz $H \setminus G \in \mathcal{I}$ dla dowolnego zbioru G, takiego że $A \subset G$ i $G \in \mathcal{S}$. Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$. Funkcję $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{H}$ nazywamy *operatorem $\mathcal{H}$-otoczki na $\mathcal{A}$*, jeżeli $\varphi(A)$ jest otoczką A dla wszystkich $A \in \mathcal{A}$. Jeżeli dodatkowo $\varphi(A) \subset \varphi(B)$, gdy $A \subset B$, to operator $\mathcal{H}$-otoczki nazywamy *monotonicznym*. Jeżeli $\mathcal{H} \subset \mathcal{B}_X$ (X - przestrzeń topologiczna), to φ nazywamy *operatorem borelowskiej otoczki*.

W pracy [2] było badane istnienie monotonicznych operatorów $\mathcal{G}_\delta$-otoczki (borelowskiej otoczki) na $\mathcal{L}$ i na $\mathcal{N}$ (względem $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathcal{N})$). W pracy [3] przenieśliśmy część twierdzeń z [2] na abstrakcyjne przestrzenie $(X, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ oraz zastosowaliśmy do badania istnienia monotonicznych operatorów borelowskiej otoczki względem $(\mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathcal{M})$.

Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest niezmienniczym na przesunięcia σ-ideałem w $\mathbb{R}^n$ (tj. $A + x \in \mathcal{I}$ dla $A \in \mathcal{I}$ i $x \in \mathbb{R}^n$). Mówimy, że operator borelowskiej otoczki $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{B} \cap \mathcal{I}$ jest *niezmienniczy na przesunięcia*, jeżeli $\varphi(A + x) = \varphi(A) + x$ dla $A \in \mathcal{I}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

W pracy [4] pokazujemy, że z pewnych założeń teoriomnogościowych (np. aksjomat Martina) wynika, że nie istnieją niezmiennicze na przesunięcia operatory borelowskiej otoczki na $\mathcal{N}$ i na $\mathcal{M}$. Istotną rolę w rozważaniach odgrywa spostrzeżenie, że pary $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ i $(\mathcal{B}a, \mathcal{M})$ mają własność Steinhausa, tj. dla dowolnych zbiorów $A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{N}$, $B \notin \mathcal{N}$ (odpowiednio, $A \in \mathcal{B}a \setminus \mathcal{M}$, $B \notin \mathcal{M}$), zbiór $A + B$ ma punkt wewnętrzny.

Pojęcia własności Steinhausa i własności Smitala dla pary $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ złożonej z ciała $\mathcal{S}$ i ideału $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ podzbiorów abelowej grupy topologicznej były badane w pracy [1]. W [6] rozważamy analogiczne pojęcia dla miar borelowskich w lokalnie zwartych polskich grupach abelowych.

Mówimy, że σ-skończona miara borelowska μ ma *klasyczną własność Steinhausa*, jeżeli $\operatorname{int}(A - A) \neq \emptyset$ dla dowolnego zbioru A, takiego że $\mu(A) > 0$, natomiast μ ma *własność Smitala*, jeżeli dla dowolnego zbioru A, takiego że $\mu(A) > 0$ i dowolnego zbioru gęstego D, zbiór $A + D$ zawiera zbiór pełnej miary.

W pracy [6] pokazujemy, że absolutna ciągłość μ względem miary Haara na X jest równoważna posiadaniu przez μ klasycznej własności Steinhausa, a to jest równoważne własności Smitala dla μ.

Ustalmy liczbę $p \in (0,1)$ i rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$, gdzie $\Omega := \{0,1\}$, $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ oraz $P_p(\{1\}) = p$. Niech $\widehat{\mu}_p$ będzie przeliczalnym produktem miar P_p oraz μ_p miarą borelowską na $[0,1]$ generowaną przez zmienną losową $F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$, tj. miarą określoną wzorem $\mu_p(B) = \widehat{\mu}_p\left(F^{-1}(B)\right)$. Przyjmijmy

$$A_p := \left\{ x \in [0,1) : \lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = p \right\},$$

gdzie $0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ oznacza rozwinięcie dwójkowe liczby x zawierające nieskończenie wiele zer.

Wiadomo, że μ_p są ciągłymi miarami probabilistycznymi, dodatnimi na niepustych przedziałach otwartych, $\mu_p(A_p) = 1$ oraz $\mu_{1/2} = \lambda$. W [6] pokazujemy, że $\mathrm{int}(A_p \oplus A_p) = \emptyset$ dla $p \neq \frac{1}{2}$, natomiast $A_p \ominus A_p = [0, 1)$ dla $p \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ ($\oplus$, $\ominus$ oznacza dodawanie i odejmowanie modulo 1). Ostatni fakt opiera się na twierdzeniu z [5], w którym udowodniony jest analogiczny wynik dla grupy $\mathbb{Z}_{2^m}$ reszt modulo 2^m.

Literatura

[1] Artur Bartoszewicz, Małgorzata Filipczak, Tomasz Natkaniec, *On Smital properties*, Topology Appl. **158** (2011), 2066–2075.

[2] Márton Elekes, András Máthé, *Can we assign the Borel hulls in a monotone way?*, Fund. Math. **205** (2009), 105–115.

[3] Marek Balcerzak, Tomasz Filipczak, *On monotone hull operations*, Math. Logic Quarterly **57** (2011), 186–193.

[4] Tomasz Filipczak, Andrzej Rosłanowski, Saharon Shelah, *On Borel hull operations*, Real Anal. Exchange **40** (2014-15), 129–140.

[5] Małgorzata Filipczak, Tomasz Filipczak, *Some algebraic properties of finite binary sequences*, Tatra Mt. Math. Publ. **65** (2016), 93–104.

[6] Artur Bartoszewicz, Małgorzata Filipczak, Tomasz Filipczak, *On supports of probability Bernoulli-like measures*, J. Math. Anal. Appl. **462** (2018), 26–35.