Własności Smitala dla σ-ideałów

Marcin Michalski

Niech $(X,+)$ będzie grupą polską, $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ σ-ciałem a $\mathcal{I} \subseteq P(X)$ nietrywialnym, niezmienniczym na $+$ i odwrotność σ-ideałem, dla którego $\mathcal{A}$ jest bazą. Oznaczmy przez $\mathcal{I}^\star = \{A^c : A \in \mathcal{I}\}$ filtr dualny wobec $\mathcal{I}$.

Definicja 1. *Mówimy, że para $(\mathcal{I},\mathcal{A})$ ma*

- *Własność Smitala (SP - Smital Property), jeśli*

$$(\forall D \subseteq X)(\forall A \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{I})(D \text{ jest gęsty, to } D + B \in \mathcal{I}^\star).$$

- *Słabszą Własność Smitala (WSP - Weaker Smital Property), jeśli*

$$(\exists D \subseteq X)(\forall A \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{I})(D \text{ jest gęsty i przeliczalny, to } D + B \in \mathcal{I}^\star).$$

- *(Bardzo) Słabą Własność Smitala (VWSP - Very Weak Smital Property), jeśli*

$$(\forall A \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{I})(\exists D \subseteq X)(D \text{ jest gęsty i przeliczalny i } D + B \in \mathcal{I}^\star).$$

Wykażemy, że WSP implikuje, że $\mathcal{I}$ jest ccc lub $\mathrm{cov}(\mathcal{I}) = \omega_1$, uogólniając przy okazji rezultat otrzymany w [2].

Opowiemy również jakie własności σ-ideałów składowych wystarczają, by niektóre własności Smitala zachowały się przy produktowaniu w sensie Fubiniego. W szczególności rozważymy takie własności jak bycie *Borel-on-Borel*, *measurable-on-measurable*, czy zawieranie pozytywnego prostokąta modulo zbiór z ideału produktowego. W tym kontekście obalimy co najmniej jedno twierdzenie z pracy [1].

Literatura

[1] Bartoszewicz A., Filipczak M., Natkaniec T., On Smital Properties, Topology and its Applications, vol. 158 (2011), pp. 2066-2075.

[2] Cichoń J., Szymański A., Węglorz B., On intersections of sets of positive Lebesgue measure, Colloquium Mathematicum, vol. 52, no. 2 (1987), pp. 173-174.